საქართველოს ოლიმპიელ მათემატიკოსთა კავშირი

Olympian

მათემატიკის ოლიმპიადა

VI კლასი, III ტური

1. იპოვეთ ყველა ნატურალური რიცხვი ისეთი რომ ამ რიცხვს დამატებული მისი ციფრთა ჯამი ტოლი იყოს 2017-ის.

2. დაამტკიცეთ რომ ნებისმიერი 5 ნატურალური რიცხვიდან შეგვიძლია 3 ისეთის არჩევა რომელთა ჯამიც იყოფა 3 ზე.

3. ოლიმპიადაზე მონაწილეობდა 6 მოსწავლე. დაამტკიცეთ რომ არსებობს ისეთი სამი მოსწავლე, სადაც ყველა ყველას იცნობს, ან ისეთი სამი მოსწავლე, სადაც არავინ არავის არ იცნობს.

4. მაღაზიის გამყიდველს აქვს სამი გირი რომელთა მეშვეობით მან ლუკას თეფშებიანი სასწორის გამოყენებით აუწონა 100 გრამი მანდარინი, ქრისტინეს -101 გრამი ბალი და მარიამს - 102 გრამი ყურძენი. ის ყოველთვის ანთავსებდა გირებს სასწორის ერთ თეფშზე ხოლო გასაყიდ საქონელს მეორე თეფშზე. რა წონის გირები შეიძლება ჰქონოდა გამყიდველს ? (იპოვეთ ყველა შესაძლო ვარიანტი და პასუხი დაასაბუთეთ).

5. გურამი, დავითი და რაუფი თამაშობენ ფეხბურთს შემდეგი წესებით. ერთი მათგანი დგას კარში, ხოლო დანარჩენი ორი ცდილობს გოლი გაუტანოს კარში მდგომს. გოლი ვისაც გააქვს ის ანაცვლებს მეკარეს. თამაშის ბოლოს აღმოჩნდა რომ გურამმა მოედანზე (არამეკარედ) ითამაშა 12-ჯერ, დავითმა მოედანზე (არამეკარედ) ითამაშა 21-ჯერ და რაუფი 8-ჯერ იდგა კარში. ვინ გაიტანა მეექვსე გოლი.

გისურვებთ წარმატებებს!

ამოხსნები და მათი ანალიზი

1. S(n)-ით ავღნიშნოთ n-ის ციფრთა ჯამი.
ადვილი სანახავია, რომ 1990-ზე ნაკლები რიცხვები არ აკმაყოფილებს პირობას, რადგან ამ შემთხვევაში $n+S(n)<1990+1+9+8+9=2017$. ასევე თუ ეს რიცხვი მეტია 2017-ზე მაშინ ამ რიცხვისა და მისი ციფრთა ჯამი მეტი იქნება 2017-ზე.
დებულება 1: შევნიშნოთ, რომ n-ის ერთეულების 1-ით გაზრდის შემთხვევაში (როცა არ ხდება ათეულების ციფრის ცვლილება) n+S(n) გამოსახულება იზრდება 2-ით (*)

განვიხილოთ შემდეგი 3 შემთხვევა:
ა)$1990\le n<2000$
ბ)$2000\le n<2010$
გ)$2010\le n<2017$

ა) n=1990-თვის $n+S(n)=1990+19=2009$ დებულება 1-ის გამოყენებით პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ n=1994.
ბ) n=2000-თვის $n+S(n)=2000+2=2002$, დებულება 1-ის გამოყენებით, n+S(n) გამოსახულების მნიშვნელობა სულ ლუწ მნიშვნელობებს ღებულობს და ვერ გახდება 2017-ის ტოლი ვერცერთი n-ისთვის 2000-დან 2010-მდე შუალედში.
გ) 2010-თვის $n+S(n)=2010+3=2013$. დებულება 1-ის გამოყენებით პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ n=2012.

2. დავყოთ რიცხვები სამ კატეგორიად, რიცხვები, რომლებიც იყოფა 3-ზე (3k სახის რიცხვები), რიცხვები, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 1-ს (3k+1 სახის რიცხვები) და რიცხვები, რომლებიც 3-ზე გაყოფისას ნაშთს გვაძლევს 2-ს (3k+2 სახის რიცხვები). თუ ამ 5 რიცხვიდან 3 აღმოჩნდება ერთიდაიგივე კატეგორიაში , მაშინ ამ 3 რიცხვის ჯამი გაიყოფა 3-ზე.
$3a_1+b+3a_2+b+3a_3+b=3(a1+a2+a3+b)\vdots 3$ (b=0,1,2)
განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ამ 5 რიცხვიდან არცერთი სამი არ ხვდება ერთ კატეგორიაში. მაშინ ყოველ კატეგორიაში მოხვდება მაქსიმუმ 2 რიცხვი და რადგანაც სულ 5 რიცხვი გვაქვს ყველა კატეგორიაში მინიმუმ 1 რიცხვი მაინც მოხვდება (2+2<5).
განვიხილოთ 3 რიცხვი სხვადასახვა კატეგორიიდან.
$3c_1+(3c_2+1)+(3c_3+2)=3(c_1+c_2+c_3+1)\vdots 3$
რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

3. განვიხილოთ რომელიმე მოსწავლე, ის დანარჩენი 5 ბავშვიდან ან იცნობს 2-ზე მეტ მოსწავლეს (3 ან მეტი) ან არ იცნობს 2 ზე მეტ მოსწავლეს.
განვიხილოთ პირველი შემთხვევა თუ ის 3-ს ან მეტს იცნობს. განვიხილოთ მისი ნაცნობებიდან 3 მოსწავლე. ამ სამ მოსწავლეში თუ რომელიმე ორი ერთმანეთს იცნობს თავდაპირველ მოსწავლესთან ერთად ქმნიან სამ ისეთ მოსწავლეს , სადაც ყველა ყველას იცნობს. თუ ამ სამ მოსწავლეში არცერთი ერთმანეთს არ იცნობს მაშინ სწორედ ეს სამი მოსწავლე შეადგენს ისეთ ჯგუფს სადაც არცერთი ერთმანეთს არ იცნობს.
განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, როდესაც თავდაპირველი მოსწავლე არ იცნობს სამს ან მეტს. თუ ამ სამი მოსწავლიდან , რომელიმე ორი არ იცნობს ერთმანეთს, მაშინ ეს ორი მოსწავლე თავდაპირველ მოსწავლესთან ერთად ქმნის სამ მოსწავლიან ჯგუფს, სადაც არცერთი

ერთმანეთს არ იცნობს. ხოლო თუ ამ სამი მოსწავლიდან ყველა ყველას იცნობს, სწორედ ეს სამი მოსწავლე იქნება ისეთი რომ ყველა ყველას იცნობს.

4. შევნიშნოთ რომ თითო წონის აწონვისას მაღაზიის გამყიდველი იყენებს მინიმუმ ერთ და მაქსიმუმ სამ გირს. ვთვათ გირების წონებია a, b და c. განვიხილოთ სამი შემთხვევა 100 გრამის ასაწონად გამყიდველი გამოიყენებდა ან სამ გირს ან ორ გირს ან ერთ გირს.

1. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა სამი გირი 100 გრამი მანდარინის ასაწონად, მაშინ a+b+c=100, შესაბამისად ის ვეღარ აწონის 101 გრამს და 102 გრამს.

2. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი a და b წონის გირი 100 გრამი მანდარინის ასაწონად, მაშინ a+b=100.

   2.1. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ერთი გირი 101 გრამი ბალის ასაწონად, მაშინ c=101. განვიხილოთ 102 გრამის აწონვის სამი შემთხვევა:

      2.1.1. ერთი გირით 102 გრამი ყურძენის აწონვა შეუძლებელია რადგან სამივე ცალცალკე მდგომი გირის წონა 102 გრამზე ნაკლებია.

      2.1.2. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 102 გრამი ბალის ასაწონად, მაშინ მას უნდა გამოეყენებინა c გირი. მივიღებთ რომ c+a=102 → a+101=102 → a=1, ხოლო b=100-1=99. **პასუხი #1: a=1, b=99, c=101** (შევნიშნოთ რომ a-ს მაგივრად b რომ აგვეღო პასუხს მივიღებდით a=99, b=1, c=101 რაც პასუხი #1-ის იდენტურია).

      2.1.3 გამყიდველი ვერ გამოიყენებდა სამივე გირს 102 გრამის ასაწონად რადგან სამი გირის ჯამი (a+b)+c=100+101=201 გრამია.

   2.2. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 101 გრამი ბალის ასაწონად, მაშინ მას უნდა გამოეყენებინა c გირი და ვთქვათ c+a=101.

      2.2.1. შევნიშნოთ რომ ერთი გირით 102 გრამი ყურძნის აწონვა შეუძლებელია რადგან სამივე ცალცალკე მდგომი გირის წონა 102 გრამზე ნაკლებია.

      2.2.2 თუ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 102 გრამის ასაწონად მაშინ მას უნდა გამოეყენებინა c და b გირები რადგან a+b=100 და c+a=101. გამოდის რომ c+b=102. სამივე გირის ჯამი გამოდის: (a+b)+(c+a)+(c+b)=303 → a+b+c=151.5. რადგან a+b=100, c=151.5-a-b=151.5-100=51.5 გრამს, რადგან c+a=101, b=151.5-a-c=151.5-101=50.5 გრამს და რადგან c+b=102, a=151.5-b-c=151.5-102=49.5 გრამს. **პასუხი #2: a=49.5, b=50.5, c=51.5.**

      2.2.3. თუ გამყიდველმა გამოიყენა სამი გირი 102 გრამის ასაწონად მაშინ a+b+c=102. გამოდის რომ b=102-a-c=102-101=1, a=100-b=100-1=99 და c=101-a=101-99=2. **პასუხი #3: a=1, b=99, c=2.**

   2.3. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა სამი გირი 101 გრამი მანდარინის ასაწონად, მაშინ a+b+c=101 და ის ვეღარ აწონის 102 გრამს.

3. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ერთი გირი 100 გრამი მანდარინის ასაწონად, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მივიჩნიოთ რომ a=100.

   3.1. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ერთი გირი 101 გრამი ბალის ასაწონად, მაშინ ვთვათ b=101.

      3.1.1. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ერთი გირი 102 გრამი ყურძენის ასაწონად, მაშინ c=102. **პასუხი #4: a=100, b=101, c=102.**

      3.1.2. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 102 გრამის ასაწონად, მაშინ ან a+c=102 → c=102-100=2 **პასუხი #5: a=100, b=101, c=2** ან b+c=102 → c=102-101=2 **პასუხი #6: a=100, b=101, c=1.**

3.1.3 შევნიშნოთ რომ გამყიდველი ვერ გამოიყენებდა სამივე გირს 102 გრამის ასაწონად რადგან a+b=100+101=201>102-ზე.

3.2 ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 101 გრამი ბალის ასაწონად, მაშინ ან a+b=101 ან b+c=101.

3.2.1. თუ a+b=101 → b=101-a=101-100=1.

3.2.1.1. თუ გამყიდველმა გამოიყენა ერთი გირი 102 გრამი ყურძნის ასაწონად, მაშინ c=102. **პასუხი #7: a=100, b=1, c=102.**

3.2.1.2. ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 102 გრამის ასაწონად, მაშინ ან a+c=102 → c=102-100=2 **პასუხი #8: a=100, b=1, c=2** ან b+c=102 → c=102-1=101. შევნიშნოთ რომ ეს პასუხი იდენტურია პასუხი #6-ის და შესაბამისად ცალკე პასუხად არ ითვლება.

3.2.1.3. თუ გამყიდველმა გამოიყენა სამი გირი 102 გრამის ასაწონად მაშინ a+b+c=102. გამოდის რომ b=102-a-c=102-100-1=1. **პასუხი #9: a=100, b=1, c=1.**

3.2.2 თუ b+c=101:

3.2.2.1. შევნიშნოთ რომ ერთი გირით 102 გრამი ყურძნის აწონვა შეუძლებელია რადგან სამივე ცალცალკე მდგომი გირის წონა 102 გრამზე ნაკლებია.

3.2.2.1. თუ გამყიდველმა გამოიყენა ორი გირი 102 გრამის ასაწონად მაშინ მას უნდა გამოეყენებინა a და b გირები. რადგან a+b=102, b=102-a=102-100=2, ხოლო c=101-2=99. **პასუხი #10: a=100, b=2, c=99.**

3.2.2.3. შევნიშნოთ რომ გამყიდველი ვერ გამოიყენებდა სამივე გირს 102 გრამის ასაწონად რადგან a+(b+c)=100+101=201>102-ზე.

3.3 ვთქვათ გამყიდველმა გამოიყენა სამი გირი 101 გრამი მანდარინის ასაწონად, მაშინ a+b+c=101 და ის ვეღარ აწონის 102 გრამს.

პასუხები:

#	**a გირი**	**b გირი**	**c გირი**	**100 გრამი**	**101 გრამი**	**102 გრამი**
1	1	99	101	a+b	c	a+c
2	49.5	50.5	51.5	a+b	a+c	b+c
3	1	99	2	a+b	b+c	a+b+c
4	100	101	102	a	b	c
5	100	101	2	a	b	a+c
6	100	101	1	a	b	b+c
7	100	1	102	a	a+b	c
8	100	1	2	a	a+b	a+c
9	100	1	1	a	a+b	a+b+c
10	100	2	99	a	b+c	a+b

5. ვთქვათ გურამი კარში იდგა x-ჯერ, დავითი y-ჯერ და რაუფმა მოედანზე ითამაშა z-ჯერ. პირობიდან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

1) 12+x=21+y=8+z და

2) $12+21+z=2(x+y+8)$ (ჯამური მოთამაშეების რაოდენობა 2-ჯერ მეტია ჯამური მეკარეების რაოდენობაზე)

პირველი ტოლობიდან ვიღებთ:
$12+x=21+y \rightarrow y=x-9$
$12+x=8+z \rightarrow z=x+4$

მეორე ტოლობაში $y=x-9$ და $z=x+4$ ჩასმით გამოდის:
$12+21+x+4=2(x+x-9+8)$
$37+x=4x-2$
$x=13$

რადგან $y=x-9=13-9=4$ და $z=x+4=13+4=17$.

მივიღეთ, რომ სულ ბავშვებმა ითამაშეს 25 თამაში (რაუფმა ითამაშა 17-ჯერ მოედანზე და 8-ჯერ კარში), საიდანაც გურამი კარში იდგა 13-ჯერ. ეს კი მხოლოდ იმ შემთხვევაშია შესაძლებელი თუ გურამმა კარში დგომით დაიწყო და ყოველი ერთი თამაშის გამოტოვებით დგებოდა კარში. ანუ მოედანზე თამაშის დროს ყველა ბურთი მან გაიტანა, ანუ მეორე, მეოთხე მეექვსე და ა.შ. 24-ე ბურთი გურამმა გაიტანა.

მაგალითი:
მეკარეების მიმდევრობა: გურამი, დათო, გურამი, დათო, გურამი, დათო, გურამი, დათო, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი, რაუფი, გურამი.