გახდი ოლიმპიელი 2019
ფინალური ტური

ამოცანები

1. იპოვეთ ყველა ისეთი მარტივი სამნიშნა რიცხვი, რომლის ბოლო ციფრი არის მისი პირველი ორი ციფრის ჯამის ტოლი.

2. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ნებისმიერი 6 განსხვავებული ციფრიდან შეგვიძლია ავარჩიოთ რამოდენიმე (არ არის აუცილებელი ყველა) ციფრი და გავყოთ ისინი ორი თანაბარი ჯამის მქონე ნაწილად.

3. მრგვალ მაგისდასთან სხედან 9 გოგო და 9 ბიჭი. დაამტკიცეთ, რომ რომელიღაცა ბავშვის მეზობლად სხედან გოგოები.

4. 7x7-ზე დაფა გაფერადებულია ჭადრაკისებურად ისე, რომ კუთხის უჯრები გაფერადებულია შავ ფრად. შეგვიძლია ავარჩიოთ ნებისმიერი ორი მეზობელი (იგულისხმება საერთო გვერდის მქონე) უჯრა და გადავღებოთ ისინი მეორე ფერში. შეგვიძლია თუ არა ამ ოპერაციის რამოდენიმეჯერ გამოყენების შემდეგ მთელი დაფა გადავღებოთ თეთრ ფერში?

5. 3 მეგობრიდან თითოეული არის ისეთი, რომ ან ყოველთვის ტყუილს ამბობს, ან ყოველთვის სიმართლეს. სამივე მათგანს დაუსვეს შემდეგი სახის (ერთიდაიგივე) შეკითხვა: თქვენ მეგობრებში ერთი მაინც თუ არის მატყუარა? პირველმა აღნიშნულ კითხვაზე უპასუხა „არა“, ხოლო მეორემ - „დიახ“. რას უპასუხებს მესამე? პასუხი დაასაბუთეთ.

სამუშაო დრო: 3 საათი

19 მაისი, 2019 წელი

გისურვებთ წარმატებას!

ფინალური ტურის ამოცანების ანალიზი

ამოცანა 1

პასუხი: 101, 167, 257, 347, 617.

ამოხსნა:

განვიხილოთ თუ რა ციფრზე შეიძლება ბოლოვდებოდეს ეს რიცხვი:

- თუ ბოლოვდება 0,2,4,6,8-ზე მაშინ რიცხვი გაიყოფა 2-ზე
- თუ ბოლოვდება 5-ზე, მაშინ რიცხვი გაიყოფა 5-ზე
- თუ ბოლოვდება 3,9-ზე, მაშინ ეს რიცხვი გაიყოფა 3-ზე რადგან ამ რიცხვის ციფრთა ჯამი იქნება 6 ან 18. ხოლო სამზე გაყოფადობის წესის მიხედვით თუ რიცხვის ციფრთა ჯამი იყოფა 3 ზე ეს რიცხვიც გაიყოფა 3 ზე.

შესაბამისად ეს რიცხვი ბოლოვდება ან 1-ით ან 7-ით.
ჩამოვწეროთ ყველა ესეთი რიცხვი: 101, 167, 257, 347, 437, 527, 617, 707, ამ რიცხვებიდან შედგენილია შემდეგი რიცხვები 707=7*101; 437= 19*23; 527= 17*31, ხოლო დანარჩენი რიცხვები კი მარტივია რადგან არცერთი არ იყოფა 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23-ზე.

ამოცანა 2

დამტკიცება:

არჩეული 6 ციფრიდან 5 მაინც იქნება არანულოვანი. განვიხილოთ ეს 5 ციფრი. მათი ყველანაირი დაჯგუფებით შესაძლებელია ჯამში მივიღოთ რიცხვები 1-დან (მხოლოდ 1-იანი რომ ავარჩიოთ) 35-მდე (9+8+7+6+5). მეორეს მხრივ 5 რიცხვის არჩევით შესაძლოა მივიღოთ 2^5-1=31 კომბინაცია, ამასთანავე ამ 31 რიცხვიდან მხოლოდ ერთი იქნება 29-ზე მეტი. (მხოლოდ ერთი კომბინაცია შეიცავს 5 წევრს და 4 წევრით შესაძლოა მივიღოთ 29-ზე მეტი მხოლოდ 9+8+7+6 კომბინაციით, რომელიც იყოფა ორ ნაწილად 9+6=8+7). შესაბამისად გვაქვს დაჯგუფების 30 შესაძლო ვარიანტი, რომელთა ჯამებიც იღებენ მნიშვნელობას 1-დან 29-მდე. დირიხლეს პრინციპის თანახმად, რომელიღაცა ორი კომბინაციის ჯამი დაემთხვევა. ავიღოთ რიცხვების ეს ორი კომბინაცია და წავშალოთ ყველა ერთნაირი წევრი, დაგვრჩება ორი თანაბარი ჯამის მქონე ნაწილი.

ამოცანა 3

დამტკიცება:

დავუშვათ საწინაამღდეგო, ვთქვათ გოგოები და ბიჭები ისეთნაირად დასხდნენ მაგიდასთან, რომ არცერთი ბავშვის მეზობლად არ სხედან გოგოები.

მაგიდასთან მსხდომი ბავშვები დავყოთ მიყოლებით მსხდომი გოგოებისა და ბიჭების „ჯგუფებად“. ცხადია, რომ გოგოებისა და ბიჭების ჯგუფების რაოდენობები ტოლია. ასევე შევნიშნოთ, რომ გოგოების ნებისმიერ ასეთ ჯგუფში ვერ იქნება 3 ან მეტი გოგო (რომელიღაცა გოგოს მეზობლად ისხდებოდნენ გოგოები) და ასევე ბიჭების ჯგუფში ვერ იქნება მხოლოდ ერთი ბიჭი (მაშინ მის მეზობლად ისხდებოდნენ გოგოები), ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ გოგოების ჯგუფებში მხოლოდ 2 ან ნაკლები გოგოა და რადგან სულ 9 გოგოა, გამოდის რომ გოგოების ჯგუფების რაოდენობა 5 ან მეტია, ხოლო ბიჭების ჯგუფებში პირიქით - 2 ან მეტი ბიჭი უნდა იყოს და შესაბამისად ბიჭების ჯგუფების რაოდენობა 4 ან ნაკლებია. მივიღეთ წინაამღდეგობა, ანუ ჩვენი დაშვება, რომ ბავშვები

ისეთნაირად დასხდნენ მაგიდასთან, რომ არცერთი ბავშვის მეზობლად არ სხედან გოგოები, ყოფილა მცდარი.

ამოცანა 4

პასუხი: არა.

ამოხსნა:

მოცემულ დაფაზე სულ 7*7=49 უჯრაა, ამასთან 25 მათგანი შავია და 24 თეთრი. დავაკვირდეთ თუ რა კანონზომიერებით იცვლება შავი და თეთრი უჯრების რაოდენობები აღნიშნული ოპერაციის გამოყენებით:

- თუ ავარჩევთ 2 შავ უჯრას და გადავღებავთ მეორე ფერში, მაშინ შავი უჯრების რაოდენობა მცირდება 2-ით, ხოლო თეთრი უჯრების რაოდენობა იზრდება 2-ით
- თუ ავარჩევთ 2 თეთრ უჯრას და გადავღებავთ მეორე ფერში, მაშინ თეთრი უჯრების რაოდენობა მცირდება 2-ით, ხოლო შავი უჯრების რაოდენობა იზრდება 2-ით
- თუ ავარჩევთ 1 შავ უჯრას და 1 ერთ თეთრ უჯრას და მათ გადავღებავთ მეორე ფერში, მაშინ შავი და თეთრი უჯრების რაოდენობა დარჩება უცვლელი,

ანუ, როგორც არ უნდა გამოვიყენოთ ეს ოპერაცია, შავი და თეთრი უჯრების ლუწ-კენტობა რჩება უცვლელი (რადგან ორივე ფერის უჯრების რაოდენობა ან უცვლელია ან იცვლება 2-ით, ანუ ლუწით) და რადგან შავი უჯრების რაოდენობა თავიდან იყო კენტი, ეს რაოდენობა ყოველთვის კენტი დარჩება და ვერ გახდება 0, ანუ მთლიანი დაფა ვერ გადაიღებება თეთრ ფერში.

ამოცანა 5

პასუხი: არა.

ამოხსნა:

დავუშვათ პირველი მეგობარი ამბობდა სიმართლეს, მაშინ მისი ნათქვამიდან გამომდინარეობს რომ მეორე და მესამე მეგობარიც სულ სიმართლეს ამბობს, ანუ 3-ვე სულ სიმართლეს ამბობს, მაგრამ მეორემ თქვა, რომ დანარჩენი ორიდან ერთი მაინც მატყუარაა, ამიტომ თავდაპირველი დაშვება, რომ პირველი მეგობარი ამბობდა სიმართლეს გამოდის მცდარი, ანუ პირველი მეგობარი მატყუარაა.

რადგან მეორემ თქვა რომ მის მეგობრებში ერთ მაინც არის მატყუარა და ჩვენ უკვე ვიცით, რომ პირველი არის მატყუარა, აქედან გამომდინარეობს რომ მეორე მეგობარს უთქვამს სიმართლე, ანუ მეორე მეგობარი ყოველთვის ამბობს სიმართლეს.

დავუბრუნდეთ ისევ პირველს, მან კითხვაზე გასცა პასუხი „არა“ და ვიცით, რომ ეს ტყუილია, ეს ნიშნავს, რომ მის მეგობრებში აუცილებლად უნდა იყოს ერთი მაინც მატყუარა, ამასთან ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ მეორე სიმართლის მთქმელია, აქედან გამომდინარეობს, რომ მე-3 მეგობარი არის მატყუარა, და რადგან მე-3 მატყუარაა და მის მეგობრებშიც არის მატყუარა პირველის სახით, ის აუცილებლად უპასუხებს დასმულ შეკითხვას ტყუილს, ანუ „არა“-ს.