გახდი ოლიმპიელი 2018
ფინალური ტური

ამოცანები

1. ყუთში დევს 2017 თეთრი და 2018 შავი ბურთი. ყოველ ჯერზე ყუთიდან მასში ჩაუხედავად იღებენ ორ ბურთს და თუ ისინი ერთიდაიმავე ფერისაა მაშინ მათ გადააგდებენ და ყუთში დებენ ერთ ახალ შავი ფერის ბურთს, ხოლო თუ ამოღებული ბურთები სხვადასხვა ფერის აღმოჩნდება, მაშინ შავს გადააგდებენ და თეთრს ჩააბრუნებენ ყუთში. ეს პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ ყუთში არ დარჩება ზუსტად ერთი ბურთი. რა ფერის იქნება ყუთში დარჩენილი უკანასკნელი ბურთი?

2. 1-დან 2018-მდე ნატურალურ რიცხვებს შორის, რომელია მეტი და რამდენით: იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იყოფა 11-ზე, მაგრამ არ იყოფა 13-ზე თუ იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფა 13-ზე, მაგრამ არ იყოფა 11-ზე?

3. მოცემულია 2018-ნიშნა რიცხვი $\overline{A22\ldots22B}$, სადაც ყველა ციფრი A და B ციფრებს შორის არის 2-იანი. იპოვეთ A და B ციფრების ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, რომელთათვისაც მოცემული რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 72-ზე.

4. მაიმუნი ბედნიერდება მაშინ, როდესაც ის შეჭამს 3 სხვადასხვა დასახელების ხილს. მაქსიმუმ რამდენი მაიმუნის გაბედნიერებაა შესაძლებელი, თუ გვაქვს 20 მსხალი, 30 ბანანი, 40 ატამი და 50 მანდარინი?

5. ექვსი მათემატიკოსი წავიდა სათევზაოდ. მათ სულ დაიჭირეს 100 თევზი, ამასთან ყველამ სხვადასხვა რაოდენობის. აღმოჩნდა, რომ ნებისმიერ მათგანს შეუძლია თავისი ნადავლი მთლიანად გადაანაწილოს დანარჩენ ხუთს შორის ისე, რომ ხუთივეს გაუხდეს თევზების თანაბარი რაოდენობა. დაამტკიცეთ, რომ ერთ-ერთ მათემატიკოსს შეუძლია მშვიდად წავიდეს სახლში მთელი თავისი ნადავლით და ამასთან დარჩენილ ხუთ მათემატიკოსს შორის ნებისმიერს შეეძლოს მთელი თავისი ნადავლის გადანაწილება დანარჩენ ოთხს შორის ისე, რომ ოთხივეს გაუხდეს თევზების თანაბარი რაოდენობა.

სამუშაო დრო: 3 საათი — 20 მაისი
2018 წელი

გისურვებთ წარმატებებს!

ფინალური ტურის ამოცანების ანალიზი

ამოცანა 1.

პასუხი: თეთრი ბურთი.

ამოხსნა:

დავაკვირდეთ როგორ იცვლება ყუთში თეთრი და შავი ბურთების რაოდენობა ამ პროცესის შესრულების შემდეგ. ყუთიდან ბურთის ამოღება შესაძლებელია 3 გზით:

ა) ამოიღეს 2 შავი ბურთი, ამ შემთხვევაში თეთრი ბურთების რაოდენობა უცვლელია, ხოლო შავების რაოდენობა მცირდება 1-ით

ბ) ამოიღეს 2 თეთრი ბურთი, ამ შემთხვევაში თეთრი ბურთების რაოდენობა მცირდება 2-ით, ხოლო შავების რაოდენობა იზრდება 1-ით და

გ) ამოიღეს 1 შავი და 1 თეთრი, ამ შემთხვევაში თეთრი ბურთების რაოდენობა უცვლელია, ხოლო შავების რაოდენობა მცირდება 1-ით

ანუ, რომ შევაჯამოთ შავების რაოდენობა უცვლელია, იზრდება 1-ით ან მცირდება 1-ით, ხოლო თეთრების რაოდენობა უცვლელია, ან მცირდება 2-ით, მაშასადამე თეთრების რაოდენობის ლუწკენტობა ამ ოპერაციის შესრულების შემდეგ არ იცვლება და რადგან თავიდან კენტი რაოდენობით იყო უკანასკნელი ბურთიც აუცილებლად თეთრი იქნება.

ამოცანა 2.

პასუხი: იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფიან 11-ზე და არ იყოფიან 13 არის 28-ით მეტი ვიდრე იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იყოფიან 13-ზე და არ იყოფიან 11-ზე.

ამოხსნა:

რადგან 2018:11=183 (ნაშთი 5), ამიტომ 1 დან 2018-მდე 11-ს ჯერადი რიცხვების რაოდენობაა 183. შესაბამისად, რადგან 2018:13=155 (ნაშთი 3), ამიტომ 1 დან 2018-მდე 13-ს ჯერადი რიცხვების რაოდენობაა 155. თითოეული ამ რიცხვების რაოდენობაში ამოსაკლები გვაქვს იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც 11-ზეც იყოფა და 13-ზეც, ანუ საძიებელი რიცხვების რაოდენობა თანაბრად შემცირდება, შესაბამისად მათი სხვაობა არ შეიცვლება და რადგან თავიდან იყო 28 (183-155) მერეც იქნება 28. ანუ, იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც იყოფიან 11-ზე და არ იყოფიან 13 არის 28-ით მეტი ვიდრე იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იყოფიან 13-ზე და არ იყოფიან 11-ზე.

თვითონ ეს ოდენობები რომ დავთვალოთ, უნდა ვნახოთ რამდენია ისეთი რიცხვების რაოდენობა რომლებიც 11-ზეც იყოფიან და 13-ზეც. რადგან 11 და 13 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, ორივეზე რომ გაიყოს რიცხვი აუცილებელია გაიყოს მათ ნამრავლზე, ანუ 143-ზე, ასეთ რიცხვები კი 1-დან 2018-მდე არის სულ 14 (რადგან 2018:143=14 ნაშთი 16). შესაბამისად იმ რიცხვების რაოდენობა, რომლებიც

იყოფიან 11-ზე და არ იყოფიან 13 არის 183-14=169, ხოლო იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იყოფიან 13-ზე და არ იყოფიან 11-ზე არის 155-14=141.

ამოცანა 3.

პასუხი: A = 5 და B = 4.

ამოხსნა:

იმისთვის, რომ რიცხვი უნაშთოდ გაიყოს 72-ზე, ის უნაშთოდ უნდა გაიყოს 8-ზე და 9-ზე (8 და 9 ურთიერთმარტივი რიცხვებია და 72 = 8 x 9). რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 8-ზე თუ მისი ბოლო სამი ციფრისგან შედგენილი რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 8-ზე. $\overline{A22 \ldots 22B}$ იყოფა 8-ზე თუ $\overline{22B}$ იყოფა 8-ზე, ამასთან ერთადერთი ციფრი რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობას არის 4, ანუ B = 4. რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 9-ზე თუ მისი ციფრთა ჯამი უნაშთოდ იყოფა 9-ზე. $\overline{A22 \ldots 22B}$ -ის ციფრთა ჯამი უდრის A + 2016 x 2 + B (2-იანების რაოდენობა 2016-ია რადგან 2018-ნიშნა რიცხვია). 2016 x 2 იყოფა 9-ზე (ტოლია 448-ის), ანუ A + B უნდა გაიყოს 9-ზე და რადგან B = 4, ერთადერთი ციფრი რომელიც აკმაყოფილებს ამ პირობას უდრის 5-ს. ამოცანის ერთადერთი პასუხია A = 5 და B = 4.

ამოცანა 4.

პასუხი: 45

ამოხსნა:

შევნიშნოთ რომ სულ გვაქვს 140 ცალი ხილი, (20+30+40+50), ხოლო 47 მაიმუნის გასაბედნიერებლად მინიმუმ 47*3=141 ხილია საჭირო. შესაბამისად მაქსიმუმ შესაძლებელია 46 მაიმუნის გაბედნიერება. ამასთან პირველი სამი სახეობის ხილის რაოდენობაა 90 (20+30+40). ამ სახეობის ხილიდან გაბედნიერებულ მაიმუნს ორი ხილი მაინც უნდა შეხვდეს, შესაბამისად მაქსიმუმ შევძლებთ 45 მაიმუნის გაბედნიერებას. (90/2)

ქვემოთ მოყვანილია მაგალითი რა შემთხვევაში ხდება 45 მაიმუნის გაბედნიერება.

თავდაპირველი რაოდენობა	20	30	40	50
20 მაიმუნი გაბედნიერდა	0	20	20	20
15 მაიმუნი გაბედნიერდა	15	0	15	15
5 მაიმუნი გაბედნიერდა	0	5	5	5
5 მაიმუნი გაბედნიერდა	5	5	0	5
დაგვრჩა	**0**	**0**	**0**	**5**

ამოცანა 5.

ამოხსნა:

რადგან ნებისმიერ მათემატიკოსს შეუძლია დანარჩენ ხუთს შორის გადაანაწილოს მთელი თავისი ნადავლი ისე, რომ ხუთივეს გაუხდეს თევზების თანაბარი რაოდენობა, ამიტომ გამოდის, რომ გადანაწილების შემდეგ ხუთივეს გაუხდება 100:5=20 თევზი, საიდანაც ადვილად დავასკვნით, რომ არცერთ მათგანს არ დაუჭერია 20-ზე მეტი თევზი.

თუ არცერთ მათგანს არ დაუჭერია ზუსტად 20 თევზი, მაშინ გამოდის, რომ ყველა მათგანმა დაიჭირა 20-ზე ნაკლები და რადგან ყველამ სხვადასხვა რაოდენობის თევზი დაიჭირა, ამიტომ გამოდის, რომ მათ ყველას ერთად დაუჭერიათ მაქსიმუმ 19+18+17+16+15+14=99 თევზი, რაც ეწინააღმდეგება ამოცანის პირობას. ე.ი. რომელიღაც მათემატიკოსმა დაიჭირა ზუსტად 20 თევზი, ხოლო დანარჩენებმა 20-ზე ნაკლები.

ცხადია, რომ როდესაც ის ვინც 20-ზე ნაკლები თევზი დაიჭირა ანაწილებს მთელ თავის ნადავლს დანარჩენებს შორის, არცერთ თევზს არ აძლევს მას ვინც 20 თევზი დაიჭირა. შესაბამისად, ის მათემატიკოსი რომელმაც 20 თევზი დაიჭირა თუ წავა სახლში, დარჩენილი ხუთი მათემატიკოსიდან ნებისმიერს შეეძლება მთელი თავისი ნადავლის დანარჩენი ოთხისთვის გადანაწილება ისე, რომ ოთხივეს გაუხდეს თევზების თანაბარი რაოდენობა.