# საქართველოს ოლიმპიელ მათემატიკოსთა კავშირი

Olympian

## მათემატიკის ოლიმპიადა
## VI კლასი, II ტური

1. მე-6 კლასების ოლიმპიადაში მონაწილეობას იღებს 73 მოსწავლე, ამასთან ყოველ მათგანს აქვს ერთი კალამი, ერთი ფანქარი და ერთი სახაზავი. ოლიმპიადის დასრულების შემდეგ აღმოჩნდა, რომ 50-მა მოსწავლემ დაკარგა კალამი, 55-მა დაკარგა ფანქარი და 61-მა - სახაზავი. სულ მცირე რამდენმა მოსწავლემ დაკარგა სამივე ნივთი?

2. გიორგის აქვს 9 ვაშლი, 10 მსხალი და 11 ატამი. თითო ჯერზე გიორგი ნათიას აძლევს ორ განსხვავებულ ხილს და სანაცვლოდ ნათია აძლევს მესამე სახეობის ხილს. გიორგი ნათიას ხილს აძლევს მანამ სანამ გიორგის ერთი სახეობის ხილი არ დარჩება. რა ხილი დარჩება გიორგის. (პასუხი დაასაბუთეთ)

3. იპოვეთ ყველა ის ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც ცნობილია რომ შემდეგი 3 წინადადებიდან ზუსტად 2 არის სწორი:
   - ამ რიცხვს მინუს 81 არის სრული კვადრატი;
   - ამ რიცხვს პლუს 8 არის სრული კვადრატი;
   - ეს რიცხვი ბოლოვდება ციფრით 4;

4. რიცხვები 1-დან 16-მდე განლაგებულია $4 \times 4$ –ზე ზომის უჯრედებიან კვადრატში. ყოველ სტრიქონში, ყოველ სვეტში და ყოველ დიაგონალზე (ერთუჯრედებიანი დიაგონალების ჩათვლით) მონიშნეს მასში მდგომი ყველაზე დიდი რიცხვი. (ერთი რიცხვი შეიძლება იყოს მონიშნული რამოდენიმეჯერ). შეიძლება თუ არა აღმოჩნდეს რომ მონიშნულია

ა) ყველა რიცხვი, გარდა მხოლოდ ორი რიცხვისა?

ბ) ყველა რიცხვი, გარდა მხოლოდ ერთი რიცხვისა?

გ) ყველა რიცხვი?

5. ხელბურთის ტურნირში, სადაც გამარჯვება 2 ქულით ფასდება, ფრე - 1 ქულით და დამარცხება - 0 ქულით ფასდება, მონაწილეობა მიიღო 16 გუნდმა. ყველა გუნდი ზუსტად ერთხელ შეხვდა ყველა დანარჩენს. აღმოჩნდა, რომ ტურნირის დასრულების შემდეგ ყველა გუნდმა სხვადასხვა რაოდენობის ქულა დააგროვა, ამასთან მე-7 ადგილზე გასულმა გუნდმა დააგროვა 21 ქულა. დაამტკიცეთ, რომ 1-ელ ადგილზე გასულმა გუნდმა ერთხელ მაინც ითამაშა ფრე.

*გისურვებთ წარმატებებს!*

## ფინალური ტურის ამოცანების ამოხსნები

1. მოსწავლეების რაოდენობა, რომელთაც ოლიმპიადის შემდეგ აქვს კალამი არის 73-50=23, იგივენაირად ფანქარი და სახაზავი დარჩა 18 და 12 მოსწავლეს, შესაბამისად. ამიტომ მოსწავლეების რაოდენობა, რომელთაც 1 ნივთი მაინც აქვთ არის მაქსიმუმ 23+18+12=53, ამგვარად მოსწავლეების რაოდენობა, რომელთაც ოლიმპიადის დასრულების შემდეგ აღარ აქვთ არცერთი ნივთი არის სულ მცირე 73-53=20, ამასთან ასეთი მოსწავლეების რაოდენობა ზუსტად 20 იქნება, თუ ყველა დანარჩენი 63 მოსწავლე დაკარგავდა ზუსტად 2-2 ნივთს. (მაგალითად 12-მა დაკარგა კალამი და ფანქარი, 18-მა დაკარგა კალამი და სახაზავი და 23-მა - ფანქარი და სახაზავი). პასუხი - სულ მცირე 20-მა მე-6 კლასელმა დაკარგა სამივე ნივთი.

2. შევნიშნოთ რომ ხილის საერთო რაოდენობას გამოკლებული კონკრეტული ხილის რაოდენობა თუ იყო ლუწი, ეს სხვაობა ყოველთვის რჩება ლუწი, ხოლო თუ იყო კენტი ყოველთვის რჩება კენტი. ხილის საერთო რაოდენობას ყოველ სვლაზე აკლდება 1 (ანუ იცვლის ლუწ კენტობას) და კონკრეტულ ხილს ან ემატება 1 ან აკლდება 1 (ასევე იცვლის ლუწ კენტობას). ვინაიდან ბოლოს გიორგის რჩება ერთი სახეობის ხილი, ეს იმას ნიშნავს რომ საერთო რაოდენობას გამოკლებული კონკრეტული დარჩენილი ხილის რაოდენობა ხდება 0-ის ტოლი. შესაბამისად ეს სხვაობა თუ დასაწყისში იყო კენტი ის 0 ის ტოლი ვერასდროს გახდება. სამივე ხილის ჯამია 9+10+11=30. ანუ სხვაობების სამი თავდაპირველი ვარიანტიდან 30-9=21, 30-10=20 და 30-11=19, ერთადერთი ლუწი სხვაობა მიიღება ჯამისთვის მსხლების გამოკლებით 30-10=20.
   მარტივად არის შესაძლებელი იმის ჩვენება თუ როგორ შეგვიძლია მსხლის დატოვება.

| ვაშლი | მსხალი | ატამი |
|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 |
| 10 | 9 | 10 |
| 9 | 10 | 9 |
| 8 | 11 | 8 |
| 7 | 12 | 7 |
| 6 | 13 | 6 |
| 5 | 14 | 5 |
| 4 | 15 | 4 |
| 3 | 16 | 3 |
| 2 | 17 | 2 |
| 1 | 18 | 1 |
| 0 | 19 | 0 |

**3.** დავაკვირდეთ რა ციფრით შეიძლება დაბოლოვდეს რიცხვის სრული კვადრატი: (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0) ამ ციფრებით დაბოლოვებული რიცხვების კვადრატები ბოლოვდება შესაბამისად (1,4,9,6,5,6,9,4,1,0)-ით. შესაბამისად მივიღეთ რომ, რიცხვის სრული კვადრატი ვერ დაბოლოვდება 2,3,7 ან 8-თ.

დავუშვათ ამოცანის მე-3 პირობა ჭეშმარიტია, მაშინ პირველი და მეორე პირობიდან ერთი უნდა იყოს აგრეთვე ჭეშმარიტი, ანუ ამ რიცხვს +8 უნდა იყოს სრული კვადრატი ან ამ რიცხვს -81 უნდა იყოს სრული კვადრატი. თუ რიცხვი ბოლოვდება 4-ით, მაშინ ამ რიცხვს +8 დაბოლოვდება 2-ით და 2-ით არცერთი სრული კვადრატი არ ბოლოვდება, ხოლო ამ რიცხვს -81 დაბოლოვდება 3-ით და არც 3-ით ბოლოვდება მთელი რიცხვის სრული კვადრატი. გამოდის რომ მე-3 პირობა ვერ სრულდება ვერცერთ ვარიანტში, შესაბამისად ვეძებთ ისეთ მთელ რიცხვს რომელსაც დამატებული 8 სრული კვადრატია და გამოკლებული 81 სრული კვადრატია.

ჩავწეროთ განტოლების სახით:

$$\begin{cases} x+8=m^2 \\ x-81=n^2 \end{cases} => m^2-n^2=89$$

მაშასადამე ვეძებთ 2 მთელ რიცხვს, m-ს და n-ს რომ მათ კვადრატებს შორის სხვაობა იყოს 89-ს ტოლი

*ა)* $m^2-n^2=89 => (m-n)(m+n)=89$ (*რადგან* 89 *მარარტივი რიცხვია*) $=>$

$$\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=89 \end{cases} => \begin{cases} m=45 \\ n=44 \end{cases} => x=45^2-8=44^2+81=2017$$

*ანუ* $x=2017$

***ბ)*** *განვიხილოთ თითოეული რიცხვის სრული კვადრატი 1-დან ზევით და დავაკვირდეთ მომდევნო სრული კვადრატების სხვაობებს, ანუ რა რიცხვებით იზრდება ყოველი შემდეგი სრული კვადრატი?*

$$\begin{cases} 1^2=1 \\ 2^2=4 \\ 3^2=9 \\ 4^2=16 \\ 5^2=25 \\ 6^2=36 \\ \vdots \end{cases} \begin{cases} 2^2-1^2=3 \\ 3^2-2^2=5 \\ 4^2-3^2=7 \\ 5^2-4^2=9 \\ 6^2-5^2=11 \\ \vdots \end{cases}$$

*თუ დავაკვირდებით სხვაობებს, აღმოვაჩენთ რომ ყოველი მომდევნო სრული კვადრატის სხვაობა იზრდება. მეტიც ეს სხვაობები მიყვება კენტ რიცხვებს თან ისე, რომ* $2^2-1^2$ *არის მე-2 კენტი რიცხვი,* $3^2-2^2$ *არის მე-3 კენტი რიცხვი. აქედან შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ რადგან 89 არის 45 კენტი რიცხვი, ის უნდა უდრიდეს* $45^2-44^2$ *და თუ შევამოწმებთ აღმოვაჩენთ რომ მართლაც უდრის:*

$$\begin{cases} m=45 \\ n=44 \end{cases} => x=45^2-8=44^2+81=2017$$

*იმისათვის რომ დავამტკიცოთ, რომ მეტი რიცხვი აღარ არის მსგავსი პირობით, საჭიროა შევამოწმოთ ყველა სრული კვადრატი 1-დან 45-მდე. რადგან 45-ს ზემოთ უკვე ორ მეზობელ სრულ კვადრატს შორის სხვაობაც კი აცდება 89-ს და შესაბამისად 45-ს ზემოთ ძებნას აზრი აღარ აქვს. თუ შევამოწმებთ 1-დან 44-მდე ყველა მთელი რიცხვის კვადრატს და მას დავამატებთ 89-ს მივიღებთ რომ აღნიშნული ჯამები არ იქნება სრული კვადრატი, მაშასადამე პასუხია* $x=2017$

**4.** ა) კი შესაძლებელია, მაგალითად:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 6 | 3 |
| 11 | 16 | 15 | 8 |
| 12 | 13 | 14 | 9 |
| 1 | 5 | 7 | 2 |

ბ) კი შესაძლებელია, მაგალითად:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 9 | 3 |
| 11 | 16 | 15 | 8 |
| 12 | 13 | 14 | 7 |
| 1 | 5 | 6 | 2 |

გ) შეუძლებელია. განვიხილოთ უმცირესი რიცხვი რომელიც არ დგას კუთხეში. ის ვერ იქნება მონიშნული რადგან იმ სვეტში და სტრიქონში რომელშიც ის მონაწილეობს ის უმცირესია და ვერ იქნება მონიშნული, ასევე იმ ორ დიაგონალში (ორივე დიაგონალი შედგება ერთზე მეტი უჯრისგან რადგან ჩვენ თავიდანვე ავიღეთ არაკუთხეში მდგომი უმცირესი რიცხვი) რომელშიც ის მონაწილეობს ის უმცირესია და ვერ იქნება მონიშნული. გამოდის რომ ერთი რიცხვი მაინც იქნება მოუნიშნავი.

**5.** სულ ტურნირში ჩატარდებოდა 16*15/2=120 შეხვედრა და შესაბამისად გუნდები ჯამში დააგროვებდნენ 240 ქულას. ერთის მხრივ, პირველ შვიდ ადგილზე გასული გუნდები დააგროვებდნენ მინიმუმ 21+22+...+27=168 ქულას (თუ მე-6-ზე გასული დააგვროვებდა 22-ს, მე-5 – 23 ქულას და ა.შ. 1-ლი - 27 ქულას). მეორეს მხრივ, ბოლო 9 ადგილზე გასული გუნდები ერთმანეთში გაათამაშებდნენ (9*8/2)*2=72 ქულას, ანუ დააგროვებდნენ მინიმუმ ამდენივე ქულას, შესაბამისად პირველ 7 ადგილზე გასული გუნდები დააგროვებდნენ არაუმეტეს 240-72=168 ქულას, ანუ გამოდის რომ პირველ შვიდ ადგილზე გასულებმა ზუსტად 168 ქულა დააგროვეს და ამასთან პირველზე გასულმა 27 ქულა აიღო და რადგან ეს რიცხვი კენტია, გამოდის რომ მან სულ მცირე ერთხელ მაინც ითამაშა ფრე, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.